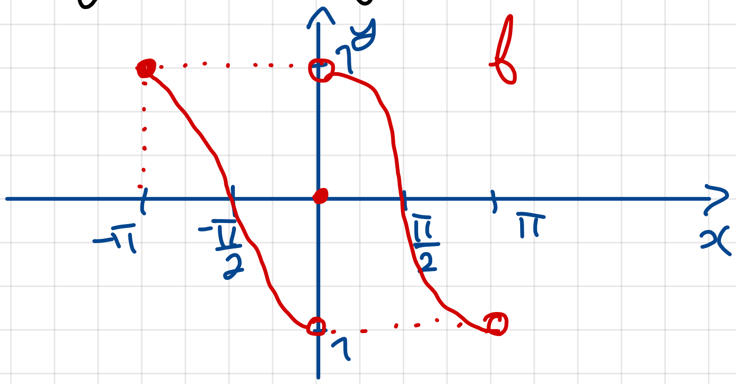
Aula 9

Ex. 1: $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in]0, \pi[\\ 0, & x = 0 \\ -\cos x, & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$

a) Gráfico de f em $[-\pi, \pi[$



b) f é uma função ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$
Então a série é de senos porque $a_0 = 0$ e $a_n = 0$

Calcular b_1

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen}(nx) dx$$

$n = 1$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(\operatorname{sen} \pi)^2}{2} - \frac{(\operatorname{sen} 0)^2}{2} \right) = 0$$

Nota: $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$

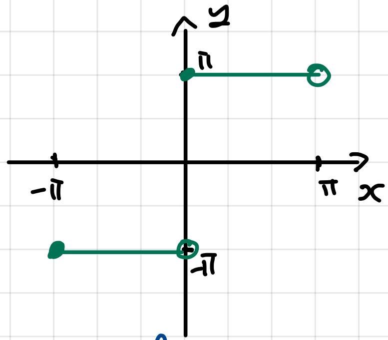
Ex. 2) $f(x) = \begin{cases} \alpha, & -\pi \le x \le 0 \\ \beta, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$

a) Usar Teorema de Dirichlet

f é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi[$ pois apenas é descontínua em $x = 0$ e os limites laterais em $x = 0$ são finitos.
f' é sec. contínua pois $f'(x) = 0$ no seu domínio
Portanto f é sec. diferenciável
Pelo Teorema de Dirichlet (slide 50) temos:

- Como f é contínua em $x = \frac{\pi}{2}$ então $S(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \beta$
- como f é descontínua em $x = 0$ então $S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2}$

b) $\alpha=-\pi$ e $\beta=\pi \rightsquigarrow f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\le x<0\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$



Então f é ímpar $\Rightarrow$ série de senos $\Rightarrow a_0=0$ e $a_m=0$

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\text{sen}(mx)dx = \frac{2}{\cancel{\pi}}\int_0^\pi \cancel{\pi}\,\text{sen}(mx)dx$$

$$= 2\times\frac{1}{m}\int_0^\pi m\,\text{sen}(mx)dx = \frac{2}{m}\left[-\cos(mx)\right]_0^\pi$$

$u=mx$

$u'=m$

Redefinindo $f(0)=0$ então f é ímpar

$$=\frac{2}{m}\left(-\cos(m\pi)-(-\cos 0)\right) = \frac{2}{m}\left(-(-1)^m+1\right) = \begin{cases}0, & m \text{ par}\\ \frac{4}{m}, & m\text{ ímpar}\end{cases}$$

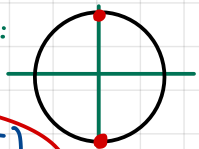
A série de Fourier é: $f(x)\sim \frac{\overset{=0}{a_0}}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\overset{=0}{a_m}\cos(mx)+b_m\,\text{sen}(mx)\right]$

$$\sim \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{4}{2m-1}\,\text{sen}((2m-1)x)$$

c) Mostrar que $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}=\frac{\pi}{4}$

Pela alínea a) $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Nota:



$\text{sen}\left((2m-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$

$=(-1)^{m+1}$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{4}{2m-1}\overset{=(-1)^{m+1}}{\text{sen}\left((2m-1)\times\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\pi \Leftrightarrow 4\times\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}=\pi \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}=\frac{\pi}{4}$$

Ex 3) $f(x)=\pi-2|x|,\ -\pi\le x\le\pi$

$$f(x)=\begin{cases}\pi-2x, & 0\le x\le\pi\\ \pi+2x, & -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

Gráfico de $f \overset{\text{TPC}}{\rightsquigarrow}$ Verifica-se que f é par (e contínua

a) Série de Fourier

Como f é par $\rightsquigarrow b_m=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-2x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi x-x^2\right]_0^\pi=\frac{2}{\pi}(\pi^2-\pi^2-0)=0$$

C.aux. $v=\pi-2x \to v'=2$

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(mx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-2x)\cos(mx)dx$$

Integração por Partes

$u'=\cos(mx) \to u=\frac{1}{m}\text{sen}(mx)$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{m}\text{sen}(mx)\times(\pi-2x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{1}{m}\text{sen}(mx)\times(-2)dx\right)$$

C.aux

$\frac{1}{m}\int m\cos(mx)dx=\frac{1}{m}\text{sen}(mx)+C,\ C\in\mathbb{R}$

TPC

$$=\dots=\begin{cases}0 & \text{se } m \text{ é par}\\ \frac{8}{\pi m^2} & \text{se } m \text{ é ímpar}\end{cases}$$

A série de Fourier é $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[a_m\cos(mx)+b_m\,\text{sen}(mx)\right]$

$$f(x)\sim\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2m-1)^2}\cos((2m-1)x)$$

b) Teo. Dirichlet

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e sec. diferenciável, pelo Teo. de Dirichlet,

↳ Justificar em T.P.C.

$f(x)$ é igual à série de Fourier, ou seja,

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

$x=0 \rightsquigarrow \cos(0)=1$

c) Mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

C. aux $f(0) = \pi - 2\times 0 = \pi$

$$f(0) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(0)}{(2n-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \pi = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

d) T.P.C. → Usar crit. Weierstrass.